

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

**Некоммерческое акционерное общество «Казахский национальный
исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева»**

Институт автоматизации и информационных технологий

Кафедра «Высшая математика и моделирование»

Смаилов Ильшат Дильшатович

**Оптимизация транспортных маршрутов для перевозки товаров со складов в
магазины**

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

6B06103 – «Математическое и компьютерное моделирование»

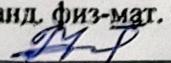
Алматы 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Некоммерческое акционерное общество «Казахский национальный исследовательский
технический университет имени К.И.Сатпаева»

Институт автоматизации и информационных технологий

Кафедра «Высшей математики и моделирования»

ДОПУЩЕН К ЗАЩИТЕ
Заведующий кафедрой ВМиМ
канд. физ-мат. наук, доцент
 Тулешева Г. А.
« 30 » 05 2024 г.

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

На тему: «Оптимизация транспортных маршрутов для перевозки товаров со складов в
магазины»

по специальности 6В06103 – Математическое и компьютерное моделирование

Выполнил

И.Д. Смаилов

Рецензент

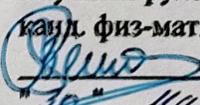
PhD, и.о. ассоциированного профессора
факультета математики, физики и
информатики, кафедра математики и
математического моделирования

КазНУ им. Абая

 К.М. Шияпов
« 19 » 05 2024 г.

Научный руководитель

канд. физ-мат. наук

 Р.Н. Зимин
« 30 » 05 2024 г.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Некоммерческое акционерное общество «Казахский национальный
исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева»

Институт автоматизации и информационных технологий

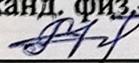
Кафедра «Высшая математика и моделирование»

6В06103 – «Математическое и компьютерное моделирование»

УТВЕРЖДАЮ

Заведующая кафедрой ВМиМ

канд. физ.-мат. наук, доцент

 Г.А.Тулешева

« 30 » 05 2024 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение дипломной работы

Обучающемуся: Смаилов И.Д.

Тема: «Оптимизация транспортных маршрутов для перевозки товаров со складов в магазины»

Утверждена приказом проректора по академической работе: №548-П/Ө

от «04» декабря 2023 г.

Срок сдачи законченной работы:

« 29 » мая 2024 г.

Исходные данные к дипломной работе: Реальные данные по перевозкам по дорожно-транспортной сети города Алматы, включающие в себя следующие данные: расположение пунктов доставки, складов и интервалы доставки.

Краткое содержание дипломной работы:

а) Теория и определения;

б) Постановка задачи;

в) Математическая формулировка и решение задачи маршрутизации;

г) Результаты вычислений.

Рекомендуемая основная литература: состоит из 3-х наименований

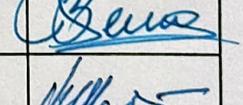
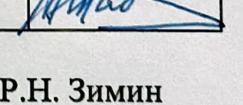
ГРАФИК

подготовки дипломной работы

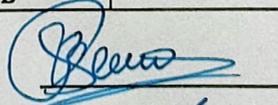
Наименование разделов, перечень разрабатываемых вопросов	Сроки представления научному руководителю и консультантам	Примечание
Теория и определения	27.02.24	Выполнено
Постановка задачи	15.03.24	Выполнено
Математическая формулировка и решение задачи маршрутизации	11.04.24	Выполнено
Результаты вычислений	05.05.24	Выполнено

Подписи

консультантов и нормоконтролера на законченную дипломный проект с указанием относящихся к ним разделов проекта

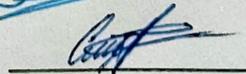
Наименования разделов	Консультанты, И.О.Ф. (уч. степень, звание)	Дата подписания	Подпись
Теория и определения	канд. физ.-мат. наук Р.Н. Зимин	27.02.24	
Постановка задачи	канд. физ.-мат. наук Р.Н. Зимин	15.03.24	
Математическая формулировка и решение задачи маршрутизации	канд. физ.-мат. наук Р.Н. Зимин	11.04.24	
Результаты вычислений	канд. физ.-мат. наук Р.Н. Зимин	05.05.24	
Нормоконтролер	канд. физ.-мат. наук, Ж.Ж. Шатманов	29.05.2024	

Научный руководитель



Р.Н. Зимин

Задание принял к исполнению обучающийся



И.Д. Смаилов

Дата

« 22 » Июля 2024 г.

РЕЦЕНЗИЯ

на дипломную работу

Смаилова Ильшата Дильшатовича

6B06103 – Математическое и компьютерное моделирование

На тему: «Оптимизация транспортных маршрутов для перевозки товаров со складов в
магазины»

ЗАМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ

Перед дипломантом стояла задача построения оптимального маршрута для грузоперевозки товаров с временными окнами доставки. В качестве инструмента использовалась надстройка в Excell «Поиск решения».

Были рассмотрены различные подходы решения задачи построения оптимального маршрута с учетом временных ограничений и ограничением по грузоподъемности. Так же были рассмотрены известные классические алгоритмы решения задачи о кратчайшем пути на примере простейшей сети. У всех рассмотренных алгоритмов есть недостаток связанный с тем, что в них нет условия моделирующее временные окна доставки.

Была рассмотрена задача линейного программирования и апробирована на сети постороенной на базе данных взятой из таблиц распределения по отгрузке товаров торговой компании «Данон». Выбранная математическая модель была подобрана таким образом, чтобы решение удовлетворяло временным ограничениям поставленными торговыми сетями, а также ограничения по грузоподъемности транспортных средств.

Была сформирована математическая постановка задачи на основе ранее упомянутой базы, для заполнения симплекс таблицы. Для решения задачи использовалась надстройка Excell «Поиск решения», которая позволяет решать оптимизационные задачи по нахождению критических точек либо конкретных значений целевой функции.

В заключении приведены общие выводы о проделанной работе.

В качестве замечания, не влияющего на общую оценку работы, следует отметить, что так как в модели задействованы лишь однотипные транспортные средства, то использование условия для грузоподъемности транспортных средств является в данной дипломной работе излишним.

Оценка работы

Учитывая актуальность дипломной работы, считаю, что дипломная работа заслуживает оценки «95%», а студент Смаилов И. Д. при успешной защите – присвоения степени бакалавра по специальности 6B06103 – Математическое и компьютерное моделирование.

Рецензент

И.о. ассоциированного профессора факультета математики, физики и информатики, кафедра математики и математического моделирования, КазНТУ им. Абая, PhD
(должность, уч. степень, звание)

К.М. Шияпов

(подпись)

« 30 »

2024 г.

ОТЗЫВ

НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

На дипломную работу
Смаилова Ильшата Дильшатовича
6В06103 – Математическое и компьютерное моделирование

Тема: «Оптимизация транспортных маршрутов для перевозки товаров со складов в магазины»

Перед Смаиловым И.Д. стояла следующая задача — построения оптимального маршрута для грузоперевозки однотипными транспортными средствами товаров с временными окнами доставки. В качестве инструмента использовалась надстройка в Excel для решения задач линейного программирования.

Были рассмотрены различные подходы решения задачи построения оптимального маршрута с учетом временных ограничений и ограничением по грузоподъемности. В качестве простейшей модели рассматривался перебор маршрутов. Так же была рассмотрена задача линейного программирования и апробирована на сети, построенной на базе данных взятой из таблиц распределения по отгрузке товаров торговой компании «Данон». Выбранная математическая модель была подобрана таким образом, чтобы решение удовлетворяло временным ограничениям поставленными торговыми сетями, а также ограничения по грузоподъемности транспортных средств.

Была сформирована математическая постановка задачи на основе ранее упомянутой базы, для заполнения симплекс таблицы. Для решения задачи использовалась надстройка Excel «Поиск решения», которая позволяет решать оптимизационные задачи по нахождению критических точек либо конкретных значений целевой функции.

Дипломная работа Смаилова Ильшата Дильшатовича состоит трех основных частей: теоретической части, основного результата и заключения.

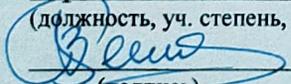
Считаю, что Смаилов И.Д. справился с поставленной ему задачей, его дипломная работа соответствует всем выдвигаемым к таким работам требованиям. На основании вышесказанного считаю, что дипломная работа заслуживает оценки «95», а Смаилов И.Д. — присуждения ему академической степени бакалавра по специальности 6В06103 — «Математическое и компьютерное моделирование».

Научный руководитель

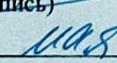
Ассоц. профессор кафедры ВМиМ,

к.ф.-м.н.

(должность, уч. степень, звание)

 Зимин Р.Н.

(подпись)

« 30 »  2024 г.

Протокол

о проверке на наличие неавторизованных заимствований (плагиата)

Автор: Смаилов Ильшат Дильшатович

Соавтор (если имеется):

Тип работы: Дипломная работа

Название работы: Оптимизация транспортных маршрутов для перевозки товаров со складов в магазины

Научный руководитель: Решат Зимин

Коэффициент Подобия 1: 7

Коэффициент Подобия 2: 4.6

Микропробелы: 18

Знаки из здругих алфавитов: 5

Интервалы: 0

Белые Знаки: 0

После проверки Отчета Подобия было сделано следующее заключение:

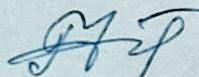
Заимствования, выявленные в работе, является законным и не является плагиатом. Уровень подобия не превышает допустимого предела. Таким образом работа независима и принимается.

Заимствование не является плагиатом, но превышено пороговое значение уровня подобия. Таким образом работа возвращается на доработку.

Выявлены заимствования и плагиат или преднамеренные текстовые искажения (манипуляции), как предполагаемые попытки укрывтия плагиата, которые делают работу противоречащей требованиям приложения 5 приказа 595 МОН РК, закону об авторских и смежных правах РК, а также кодексу этики и процедурам. Таким образом работа не принимается.

Обоснование:

Дата



Заведующий кафедрой

АННОТАЦИЯ

В дипломной работе рассматривается задача построения кратчайшего маршрута транспортного средства для перевозки грузов. Цель работы: оптимизация и построение транспортных маршрутов для перевозки товаров со склада в магазины с учетом временных интервалов доставки.

В ходе работы была построена транспортная сеть с временными окнами на основе которой сформулирована и решена задача линейного программирования. В качестве инструмента для решения поставленной задачи выступала программа Excel.

АНДАТПА

Дипломдық жобада жүктерді тасымалдау үшін көлік құралының ең қысқа жолын құру мәселесі қарастырылды. Жұмыстың мақсаты: жеткізу уақыт аралығын ескере отырып, жүктерді қоймалардан дүкендерге тасымалдаудың көлік жолдарын оңтайландыру және салу.

Жұмыс барысында уақыт терезелері бар көлік желісі салынды, оның негізінде сызықтық бағдарламалау мәселесі тұжырымдалып, шешілді. Мәселені шешу құралы ретінде Excel бағдарламасы пайдаланылды.

ABSTRACT

The diploma thesis addresses the problem of constructing the shortest route for a transportation vehicle carrying goods. The aim of the study is to optimize and build transportation routes for delivering goods from the warehouse to stores, taking into account delivery time intervals.

During the study, a transportation network with time windows was constructed, based on which a linear programming problem was formulated and solved. As a tool for solving the stated problem, Excel software was used.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
1 Теория и определения	8
1.1 Транспортные задачи	8
1.2 Задача поиска кратчайшего пути	8
1.2.1 Сетевые модели	9
1.3 Математическое программирование	10
1.3.1 Линейное программирование	10
1.4 Инструмент поиска решения задачи линейного программирования	11
1.4.1 Надстройка «Поиск решения»	12
1.4.2 Симплекс метод	13
2 Решение задачи маршрутизации с учетом временных окон	15
2.1 Постановка задачи	15
2.2 Математическая модель задачи маршрутизации	16
2.3 Входные, выходные параметры и ограничения задачи	21
2.4 Пример решения задачи на простой транспортной сети	22
2.5 Решение задачи маршрутизации на основе транспортной сети компании «Данон»	28
2.5.1 Ход построения маршрута	28
2.5.2 Результаты вычислений	31
Заключение	33
Список использованной литературы	34
Приложение А	35

ВВЕДЕНИЕ

В связи с растущей загруженностью дорог в городе Алматы водители предприятий не успевают доставить товары в установленные временные интервалы доставки, что приводит к возвратам продукции, росту неудовлетворенности клиентов, что часто приводит к потерям выручки и убыткам. Существуют модели, благодаря которым предприятие может значительно сократить расходы на развозку груза путем оптимизации последовательности посещения торговых точек.

В работе рассматривается логистическая область применения задачи маршрутизации транспорта. Осуществляется поиск решения оптимального маршрута на основе транспортной сети компании «Данон», которая занимается поставкой молочной продукции в сети крупных супермаркетов и магазинов города Алматы. Крупные торговые сети имеют распланированное между ними расписание приема товаров от поставщиков, которое включает в себя временные интервалы для приема продукции различной категории. Если поставщик опаздывает, то магазин вынужден либо отказать в приеме товара, либо перенести его очередь на конец рабочего дня, вследствие чего транспортное средство вынуждено вернуться в посещенную торговую точку. Для избежания подобных ситуаций рассмотрена задача транспортной маршрутизации с учетом временных окон.

Для оптимизации маршрутов перевозки товаров построена транспортная сеть, на основе которой сформулирована задача линейного программирования при помощи математической модели, которая учитывает ограничения по времени отгрузки. Оптимальным будет считаться маршрут, который удовлетворяет временным окнам доставки груза. В работе предполагается, что, решив данную задачу, торговая компания сократит логистические расходы. Затраты на перевозку уменьшаются путем оптимизации пройденного расстояния.

1 Теория и определения

1.1 Транспортные задачи

Транспортные задачи – это специальный класс задач линейного программирования, который описывает перевозку каких-либо товаров из исходного пункта отправки в пункты назначения. Назначением таких задач является минимизация стоимости перевозки груза за счет выбора оптимального маршрута с учетом всех ограничений.

Решение транспортной задачи позволит сократить расходы на перевозку товаров, выбрать оптимальный маршрут, а также уменьшить различные расходы, что приведет конкурентоспособности самого предприятия.

Для постановки транспортной задачи необходимо сформировать транспортную сеть, которая будет состоять из множества узлов, связанных ребрами (или дугами). Ребра могут быть направленными или ориентированными. Путь – это последовательность ребер, соединяющая два узла, независимо от направления ребра. Цикл – путь, в котором начальный и конечный узел совпадают. Ориентированный цикл – это цикл с ориентированными в одном направлении ребрами.

1.2 Задача поиска кратчайшего пути

Задача поиска кратчайшего пути – это задача о нахождении самого короткого пути между некоторыми узлами графа $G(N,D)$ где N это множество узлов, а D это множество ребер графа. Она является одной из самых значимых задач теории графов, на основе которой решаются оптимизационные транспортные задачи.

В задаче поиска кратчайшего пути необходимо минимизировать сумму весов ребер, составляющих путь от одного узла до другого. Эти ребра могут быть ориентированными, неориентированными или смешанными. В зависимости от конкретной постановки задачи, в качестве весов графа могут выступать различные параметры, такие как пройденное расстояние, затраченное время или другие издержки, например затраты на топливо, стоимость перевозки груза и другие связанные расходы. Таким образом, веса ребер напрямую определяют общий «стоимость» пути в графе, что является основным критерием для его оптимизации.

Пространство, в котором происходит поиск, обычно представляется в виде графа. Вершины графа представляют собой точки или места, а ребра графа представляют собой пути или дороги между этими точками. Веса на ребрах графа могут представлять расстояния или стоимости перемещения между вершинами. Целью алгоритма поиска пути является нахождение кратчайшего или наиболее экономичного пути от начальной вершины до конечной вершины [3].

Для решения таких задач существует большое количество различных алгоритмов, которые позволят найти самый короткий путь как для пары узлов, так и для всего множества узлов.

Среди них можно выделить алгоритм Флойда-Уоршелла и алгоритм Дейкстры. Алгоритм Флойда-Уоршелла предназначен для поиска кратчайших путей между всеми парами вершин во взвешенном графе. Результатом его работы является матрица, в которой каждый элемент представляет собой длину кратчайшего пути между соответствующими вершинами, алгоритм работает следующим образом:

- 1) Создаются матрицы размерности $n \times n$, где n - количество узлов в графе.
- 2) Элементы матриц заполняются расстояниями от узла i до узла j . Если между двумя узлами нет пути, элемент ставится равным бесконечности.
- 3) Далее для каждой следующей матрицы учитывается промежуточный узел, через который проходит путь от исходного узла к целевому. Если сумма расстояний от исходного узла до промежуточного узла и от промежуточного узла до целевого узла меньше текущего расстояния, элемент матрицы обновляется.
- 4) Алгоритм повторяется столько раз, сколько узлов в графе.
- 5) В итоге получается матрица, содержащая длины кратчайших путей между каждой парой узлов.

Этот алгоритм полезен, например, при оптимизации маршрутов в транспортных задачах с ограничениями по времени (time windows). Он также может использоваться для решения других задач, связанных с оптимизацией и поиском кратчайших путей.

Алгоритм Дейкстры позволяет найти наименьшие расстояния от начальной вершины графа ко всем остальным. Зная эти расстояния, можно построить кратчайший маршрут между начальной и другими точками. Этот метод особенно полезен при решении задач нахождения оптимальных маршрутов в транспортных сетях, например, при планировании доставки товаров или обслуживания клиентов.

1.2.1 Сетевые модели

Существует большое количество практических задач математического программирования, которые можно представить в виде сетевых задач. Например: поиск кратчайшего пути, определение схемы транспортировки груза, составление графиков строительных работ и т. п. [1].

Решение вышеперечисленных задач требует применения сетевых оптимизационных алгоритмов такие как: алгоритм поиска наикратчайшего пути, алгоритм минимизации стоимости потока в сети, алгоритм определения критического пути или алгоритм нахождения минимального остовного дерева. Данные задачи можно решить, как задачи линейного программирования, более

того, специфика структуры таких задач позволит разработать специальные сетевые алгоритмы, которые будут эффективнее стандартного симплекс метода.

1.3 Математическое программирование

Математическое программирование – это одна из математических дисциплин, занимающаяся разработкой методов для нахождения экстремумов целевой функции $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ среди множества значений, которые определяются ограничениями $g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) \leq b_i; i = 1, 2, 3, \dots, m$, где f и g_i – заданные линейные функции, а b_i множество его ограничений. Наличие таких ограничений как раз отличают задачи математического программирования от классических задач математического анализа по нахождению экстремальных значений целевой функции.

Так же математическое программирование можно рассматривать как совокупность самостоятельных разделов, которые занимаются изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

В зависимости от вида целевой функции и функций ограничений задачи математического программирования подразделяются на два основных класса:

- 1) задачи линейного программирования, целевая функция и функции ограничений – линейные функции;
- 2) задачи нелинейного программирования, то есть если хотя бы одна из указанных функций нелинейна.

1.3.1 Линейное программирование

Линейное программирование – мощный инструмент, позволяющий решать оптимизационные задачи на множествах n -мерного векторного пространства, вектора которых задаются при помощи систем линейных неравенств либо уравнений. Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т. е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования сводится широкий круг вопросов планирования экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения.

В общем виде задачу линейного программирования можно представить следующим образом: необходимо найти вектор $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$, который будет находить либо минимум, либо максимум целевой функции (1.1) и удовлетворяющая следующим условиям (1.2), (1.3):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k c_j x_j \rightarrow \max \text{ или } \min, \quad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (1.2)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (1.3)$$

Вектор X компоненты которого удовлетворяют всем ограничениям, является допустимым решением задачи линейного программирования. Каждое такое решение образует область определения задачи ЛП (область допустимых значений). Данное допустимое решение, которое максимизирует либо минимизирует, в зависимости от поставленной задачи, целевую функцию $f(X)$, называется оптимальным планом задачи ЛП.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции f), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования[4]. Так же линейное программирование гарантирует нам оптимальное решение при наличии области допустимых значений.

1.4 Инструмент поиска решения задачи линейного программирования

Табличный процессор Excel значительно упрощает расчеты, необходимые для решения задач по нахождению оптимальной точки. Табличный процессор — это программная часть Excel, предназначенная для автоматизации обработки данных, занесенных в таблицу. Благодаря своим возможностям Excel позволяет пользователям легко и эффективно выполнять сложные вычисления и анализ данных.

В таблицах Excel формулы используются для выполнения различных расчетов. Формула в Excel состоит из нескольких компонентов: знак равенства, численные значения либо ссылки на ячейки, и операторы. Формулы можно вводить непосредственно в ячейку или в строку формул после выбора ячейки. Формулы могут содержать текст, числа и ссылки на другие ячейки, что делает их мощным инструментом для выполнения расчетов.

Для облегчения работы с формулами в Excel предусмотрены функции, которые представляют собой готовые формулы, разработанные для выполнения конкретных задач.

Excel предлагает большое количество встроенных функций, сгруппированных по категориям, таким как математические, статистические, логические (булевы) и многие другие. Эти функции упрощают процесс создания сложных формул и позволяют пользователям легко выполнять разнообразные вычисления.

Использование функций в Excel помогает сократить время на выполнение повторяющихся задач и уменьшить вероятность ошибок при ручном вводе данных. Применяя функции, пользователи могут автоматизировать многие аспекты работы с данными, что делает Excel незаменимым инструментом для анализа и обработки информации.

В результате табличный процессор Excel является мощным средством для автоматизации расчетов и обработки данных, позволяя пользователям эффективно решать задачи различной сложности и находить оптимальные решения.

1.4.1 Надстройка «Поиск решения»

«Поиск решения» — это инструмент, который иногда называют анализом «что, если?». Он позволяет найти оптимальное значение для формулы, содержащейся в одной ячейке, которую мы называем целевой. «Поиск решения» работает с группой ячеек, прямо или косвенно связанных с формулой в целевой ячейке.

Решая задачу с помощью надстройки «поиска решений» необходимо начать с математической модели, которая содержит четыре типа данных: целевая функция, константы, ограничения и изменяемые ячейки[6].

Целевая функция – это результирующий показатель, для которого «поиск решения» подбирает экстремальные значения. Чтобы программа понимала, какие данные являются экстремальными, мы задаем целевую функцию в виде формулы. Данную формулу необходимо отобразить в отдельной ячейке. Результирующий показатель принимает максимальное или минимальное значения или может быть заданным заранее числом.

Константы – это исходная информация, к которой относится расходы на каждую перевозку, затраты товарно-материальных ценностей, прибыльность продаж и другие. При помощи константы можно задать ограничения либо условия соответствующие модели.

Изменяемые ячейки – это переменные, которые необходимо найти. В различных случаях бывает одна изменяемая ячейка либо диапазон ячеек. В нашем случае изменяемые ячейки отображают выбор ребра, а также время обслуживания каждого узла. При заполнении диалогового окна «Поиск

решений» необходимо оставить изменяемые ячейки пустыми чтобы программа сама нашла значения.

Ограничения — это условия, которые необходимо учитывать при оптимизации целевой функции. Они могут включать такие факторы, как размер инвестиций, срок реализации проекта или объем покупательского спроса.

Надстройка «Поиск решения» для решения задачи ЛП использует симплекс метод, суть которого заключается в том, что он достигает точки оптимума, переходя от одной вершины к соседней. Каждая новая вершина выбирается таким образом, чтобы приблизить целевую функцию к оптимальному решению наиболее быстро и эффективно[6].

1.4.2 Симплекс метод

Симплекс-метод – это итеративный процесс направленного решения системы уравнений по шагам, который начинается с опорного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области допустимого решения, улучшая значение целевой функции до тех пор, пока целевая функция не достигнет оптимального значения.

Симплексный метод является универсальным методом линейного программирования.

Итак, если мы решаем ЗЛП в канонической форме, то система ограничений — это обычная система линейных уравнений. При решении задач ЛП получаются системы линейных уравнений, имеющие, как правило, бесконечно много решений.

Алгоритм симплекс метода:

- 1) Преобразование задачи в каноническую форму: приводим задачу линейного программирования к канонической форме, чтобы все ограничения стали уравнениями с неотрицательными переменными;
- 2) Выбор начальной допустимой базисной точки: определяем начальную допустимую базисную точку (угловую точку), это делается с помощью введения дополнительных переменных, называемых искусственными, и решения вспомогательной задачи;
- 3) Построение начальной симплекс-таблицы: формируем начальную симплекс-таблицу, включающую все переменные, ограничения и коэффициенты целевой функции;
- 4) Проверка оптимальности текущего решения: проверяем, является ли текущее решение оптимальным, если все коэффициенты в строке целевой функции неотрицательные, текущее решение является оптимальным;
- 5) Выбор входящей переменной: если текущее решение не оптимально, выберите переменную, которая войдет в базис;
- 6) Выбор выходящей переменной: определяем, какая переменная должна выйти из базиса для сохранения допустимости решения;

- 7) Обновление симплекс-таблицы: обновляем симплекс-таблицу, выполняя элементарные преобразования строк, чтобы новая базисная переменная имела коэффициент 1 в своей строке, а все остальные коэффициенты в этом столбце стали нулевыми;
- 8) Повторение шагов: повторяем шаги 4–7 до тех пор, пока не достигнем оптимального решения;
- 9) Интерпретация результата: когда достигнута оптимальная симплекс-таблица, значения переменных, соответствующих базисным переменным, представляют собой оптимальное решение задачи.

2 Решение задачи маршрутизации с учетом временных окон

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую постановку задачи поиска оптимального маршрута: даны координаты торговых точек, есть некоторый объем товара, который необходимо доставить в определенное временное окно, так же есть информация о грузоподъемности и количестве транспортных средств. Необходимо найти решение, при котором будут удовлетворены все потребности торговых в пределах указанных временных интервалах.

Каждая торговая точка посещается единожды, поэтому мы вводим ограничения и на посещения узлов, то есть после посещения одного магазина следующее ребро будет ориентированно от него.

В качестве базы данных была рассмотрена таблица распределения торговых точек фирмы Данон (Рисунок – 1), которая занимается поставкой молочной продукции. Так же была добыта информация о грузоподъемности транспортных средств и интервалы времени приема товаров магазинами. Известно расположение склада: г. Алматы, улица Бурундайская 93Д.

№	Order number	Ship to name	Goods issued date	Delivery number	Addit.text 1	Ship-to Street
1	443569306	TOO MAGNUM CASH&CARRY	18.03.2024	5049251010	Аюколов Медет	М-Н КАЗАКФИЛЬМ Д. 17
2	443578862	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049251029	Аюколов Медет	РОЗЫБАКИЕВА УЛ. Д.4
3	443582442	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049248439	Аюколов Медет	РОЗЫБАКИЕВА УЛ. Д.4
4	443582178	АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ №40	18.03.2024	5049248438	Аюколов Медет	МКР. АСТАНА 1/10
5	443583280	АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ №43 TOO "MAGNUM	18.03.2024	5049251002	Аюколов Медет	МКР. АЛМАГУЛЬ Д.18А
6	443580368	АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ №49 TOO "MAGNUM	18.03.2024	5049248432	Аюколов Медет	МКР. ОРБИТА-2 Д.2.13.
7	443570953	TOO "MAGNUM CASH&CARRY"	18.03.2024	5049251012	Ахметов Исраил	ХАН ШАТЫР Д.273
8	443583168	ИП "ТАБЫС"	18.03.2024	5049251033	Ахметов Исраил	ЖАНДОСОВА 50
9	443583169	ИП "ТАБЫС"	18.03.2024	5049251001	Ахметов Исраил	МКР-Н КАЛКАМАН 2, УЛ. 3 Д.66
10	443578858	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049251016	Ахметов Исраил	МКР. ТАУСАМАЛЫ, УЛ. БАКШАЛЫ УЧ.7/29
11	443576073	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049251019	Ахметов Исраил	МКР. ТАУСАМАЛЫ, УЛ. БАКШАЛЫ УЧ.7/29
12	443573585	TOO "СКИФ ТРЕЙД" №58	18.03.2024	5049251014	Ахметов Исраил	УЛ. РЫСКУЛОВА Д.90 А
13	443575901	TOO "СКИФ ТРЕЙД" №58	18.03.2024	5049251018	Ахметов Исраил	УЛ. РЫСКУЛОВА Д.90 А
14	443579278	TOO "СКИФ ТРЕЙД" №58	18.03.2024	5049248425	Ахметов Исраил	УЛ. РЫСКУЛОВА Д.90 А
15	443580065	TOO СКИФ ТРЕЙД №35	18.03.2024	5049248428	Балтабаев Асхат	ПР. ДОСТЫК ПОМ. 168
16	443577395	TOO MAGNUM CASH&CARRY	18.03.2024	5049251022	Балтабаев Асхат	МКР. КОКТЕМ-1 Д20.КВ. ЧА
17	443577396	TOO "MAGNUM CASH&CARRY"	18.03.2024	5049251023	Балтабаев Асхат	МКР. САМАЛ-3 1
18	443563594	АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ №51 TOO "MAGNUM	18.03.2024	5049251007	Балтабаев Асхат	ПР. НҰРСҰЛТАН НАЗАРБАЕВА Д.226.13Т.
19	443578556	TOO "SURAYA"	18.03.2024	5049251027	Балтабаев Асхат	МКР. САМАЛ-2 Д.111
20	443576238	TOO СКИФ ТРЕЙД №37	18.03.2024	5049251020	Ниязов Рустам	МКР АШИБУЛАК УЛ АПТЕЧНАЯ 2Б
21	443582568	TOO MAGNUM CASH&CARRY ФИЛИАЛ №4	18.03.2024	5049251000	Ниязов Рустам	УЛ. ХАЛИУЛЛИНА Д. № 194
22	443577435	АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ № 35	18.03.2024	5049251024	Ниязов Рустам	МИКРОРАЙОН АЙНАБУЛАК Д.98А
23	443577822	TOO "СКИФ ТРЕЙД" №42	18.03.2024	5049251025	Ниязов Рустам	МАЙЛИНА УЛ. Д.79
24	443580254	TOO "СКИФ ТРЕЙД" №42	18.03.2024	5049248430	Ниязов Рустам	МАЙЛИНА УЛ. Д.79
25	443579276	ИП ГОРОХОВА ЛЮДМИЛА ВИКТОРОВНА	18.03.2024	5049251031	Пушпаков Багдаулет	Ю. ГАГАРИНА 12Б
26	443582369	ИП ГОРОХОВА ЛЮДМИЛА ВИКТОРОВНА	18.03.2024	5049251032	Пушпаков Багдаулет	Ю. ГАГАРИНА 12Б
27	443579036	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049248421	Пушпаков Багдаулет	ЖАНСУГУРОВА УЛ. Д.118
28	443580098	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049248429	Пушпаков Багдаулет	ЖАНСУГУРОВА УЛ. Д.118
29	443581645	TOO "MAGNUM CASH&CARRY"	18.03.2024	5049248436	Пушпаков Багдаулет	УЛ Ш. УӨЛИХАНОВ Д.98В
30	443579072	TOO "MAGNUM CASH&CARRY" АФ№71	18.03.2024	5049248424	Пушпаков Багдаулет	УЛ ТИТОВ ЗДАНИЕ15/1
31	443566477	TOO "СКИФ ТРЕЙД" №56	18.03.2024	5049251008	Пушпаков Багдаулет	УЛ. МИХАИЛА ЛУКИНА УЧ.2
32	443576259	TOO "СКИФ ТРЕЙД" №56	18.03.2024	5049251021	Пушпаков Багдаулет	УЛ. МИХАИЛА ЛУКИНА УЧ.2
33	443570790	TOO "MAGNUM CASH&CARRY" АФ 70	18.03.2024	5049251030	Пушпаков Багдаулет	УЛИЦА ИЛИЯС ЖАНСУГРОВ Э ЗДАНИЕ 159
34	443579279	TOO СКИФ САУДА №9	18.03.2024	5049248426	Сапаркан Бакытали	МКР. АҚСАЙ 4 Д. 22
35	443579039	TOO СКИФ САУДА №17	18.03.2024	5049248423	Сапаркан Бакытали	МКР. МАМЫР 4 Д. 197А
36	443581841	TOO СКИФ САУДА №17	18.03.2024	5049248437	Сапаркан Бакытали	МКР. МАМЫР 4 Д. 197А
37	443575253	TOO "СКИФ ТРЕЙД"	18.03.2024	5049251015	Сапаркан Бакытали	РАЙЫМБЕКА ПР. Д.514А
38	443580347	TOO "СКИФ ТРЕЙД"	18.03.2024	5049248431	Сапаркан Бакытали	РАЙЫМБЕКА ПР. Д.514А
39	443580740	TOO "СКИФ ТРЕЙД"	18.03.2024	5049248435	Сапаркан Бакытали	РАЙЫМБЕКА ПР. Д.514А
40	443561314	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049251005	Сапаркан Бакытали	ЯССАУИ УЛ. Д.68
41	443580422	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049248433	Сапаркан Бакытали	ЯССАУИ УЛ. Д.68
42	443580736	TOO "TOIMART"	18.03.2024	5049248434	Сапаркан Бакытали	УЛИЦА БАЙКЕНА ДОМ 13А

Рисунок 1 – Таблица распределения нагрузки

Дано фиксированное количество транспортных средств, между которыми были распределены торговые точки, таким образом, что оно вместит в себя необходимое количество товара, так как речь идет о молочной продукции хранить товар на складе не лучшее решение, поэтому магазины распределены так, чтобы загрузить машину в один рейс. В качестве транспортного средства компания использует грузовой автомобиль марки ISUZU грузоподъемностью 3,5 тонн.

Задача заключается в нахождении оптимального маршрута для каждого водителя. Для нахождения оптимума необходимо сформулировать задачу линейного программирования в виде системы неравенств, то есть написать математическую постановку.

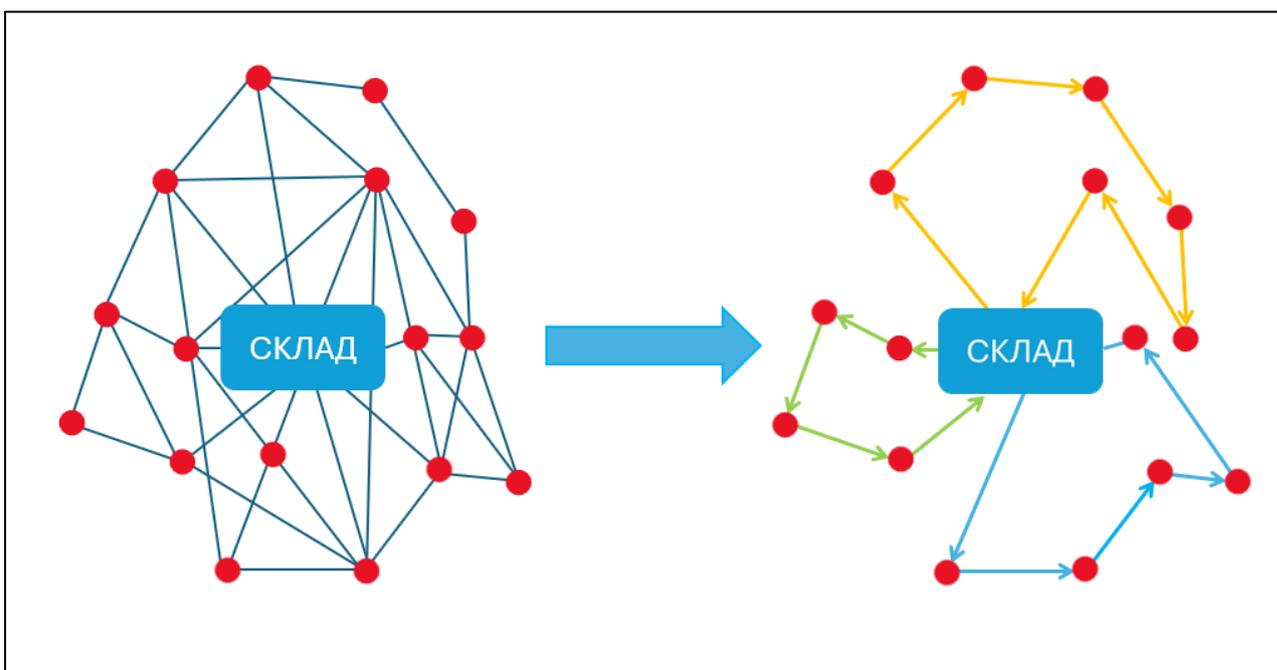


Рисунок 2 – Пример решения транспортной сети

2.2 Математическая модель задачи маршрутизации

Задачу можно решить, представив в виде задачи коммивояжера с некоторыми модификациями, для этого добавим некоторые условия, которые учитывают, во-первых, количество транспортных средств, во-вторых, ограничения по времени.

На самом деле это задача не про расстояния, а про поиск оптимального решения по выбранному параметру в сложной системе. Дело в том, что расстояние – это только одна характеристика маршрута. А могут быть и другие:

Время в пути. Время не обязательно напрямую зависит от расстояния. Например, в Алматы можно пойти ночью самым коротким путём и застрять на

развязках или перекрестках проспектов. По расстоянию это будет километр, а по времени – час.

Количество и частота. У нас могут быть лимиты на посещения: не более или не менее определённого количества городов. В классической задаче – нужно побыть в каждом городе не менее одного раза. Также могут быть ограничения вроде «не более одного раза» или «побывать в каждом городе дважды».

Направление движения. Не по всем дорогам можно проехать в обе стороны — есть направления с односторонним движением. Это значит, например, что из одной точки до другой не получится доехать напрямую. Значит, придётся выбирать другой маршрут.

Зависимости. Например, вам нужно по пути отвезти документы в одно учреждение, но перед этим забрать их в другом. Если не выполнить этот порядок, поездка теряет смысл, потому что не выполнено важное условие.

Всё сразу. Может оказаться так, что нам нужно построить такой маршрут:

- посетить все города Казахстана самым коротким путём;
- в каждом городе посмотреть три главных достопримечательности;
- потратив минимум денег на дорогу и проживание;
- побывать в каждом городе не больше одного раза;
- и успеть всё это за 5 дней.

Задача коммивояжёра представляет собой целочисленную задачу о путешественнике, связанную с оптимизацией маршрута. В ней рассматривается сеть из n городов, соединённых дорожными магистралями. Путешественник может перемещаться между городами, и для каждой пары городов (i, j) введены бинарные переменные x_{ij} : $x_{ij} = 1$, если путешественник переезжает из i -го города в j -ый, и $x_{ij} = 0$, если j -ый город не посещается.

Для удобства введём $(n + 1)$ -й город, который совмещён с 1-м городом. То есть расстояния от $(n + 1)$ -го города до любого другого, отличного от первого, равны расстояниям от первого города. При этом, если из первого города можно лишь выйти, то в $(n + 1)$ -й город можно лишь прийти. Дополнительно введём целые переменные u_i , которые представляют номер посещения города на маршруте. Так, $u_1 = 0$, а $u_{n+1} = n$.

Чтобы избежать замкнутых путей (то есть чтобы путешественник не вернулся в исходный город), мы вводим дополнительные ограничения, связывающие переменные x_{ij} и u_i . Например, для каждого города i , кроме первого и последнего, должно выполняться условие (2.1):

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \quad (2.1)$$

Это означает, что если путешественник переезжает из i -го города в j -ый ($x_{ij} = 1$), то разница между номерами посещения городов не должна превышать $n - 1$. Это обеспечивает отсутствие замкнутых путей.

Таким образом, задача заключается в нахождении оптимального маршрута, удовлетворяющего всем ограничениям, и минимизации общего расстояния

путешествия. Для решения такой задачи можно использовать методы целочисленного программирования, например метод ветвей и границ. Важно также учесть временные окна для посещения городов, если они имеются.

В зависимости от конкретно поставленной цели и требований задачу коммивояжера можно модифицировать, добавив новые ограничения, чтобы учесть различные аспекты задачи о путешественнике с временными окнами. Например:

- временные окна: если у каждого города есть временное окно, в которое путешественник должен прибыть, для этого введем следующее ограничение для i -того города (2.2):

$$a_i \leq u_i \leq b_i \quad (2.2)$$

где a_i, b_i начало и конец временного окна для i -того города, это обеспечит выполнение условия, что путешественник посетит каждый город в указанный промежуток времени.

- ограничения на вместимость: если у путешественника есть ограничение на вместимость (например, он может перевозить только определенное количество товаров), можно ввести ограничения на суммарный вес или объем груза на маршруте для каждой пары городов (i, j) (2.3):

$$d_i x_{ij} \leq Q \quad (2.3)$$

где d_i вес или объем груза для i -того города а Q максимальная вместимость.

- приоритеты городов: если некоторые города более важны, можно ввести веса для каждого города и стремиться максимизировать суммарный вес c_{ij} посещенных городов (2.4):

$$c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (2.4)$$

- ограничения на длину маршрута: если есть ограничение на общую длину маршрута, можно ввести следующее ограничение (2.5):

$$\sum_{i,j} x_{ij} \leq L, \quad i \neq j \quad (2.5)$$

где L максимальная длина маршрута

- ограничения на количество посещений городов: если есть ограничение на количество посещений каждого города, можно ввести следующее ограничение (2.6):

$$\sum_j x_{ij} = 1, \quad i \neq j \quad (2.6)$$

Задача маршрутизации транспорта является обобщением задачи коммивояжера. В задаче транспортной маршрутизации учитываются дополнительные ограничения, такие как маршрутизация нескольких транспортных средств в автопарке компании, пробки на дорогах и временные интервалы доставки покупателям.

ЗТМ представляет собой поиск оптимальных маршрутов для двух или более автомобилей, которые должны посетить все заданные точки на карте, вернувшись в исходную точку. Задача транспортной маршрутизации находит применение в различных отраслях, таких как логистика, машиностроение и программирование.

Алгоритмы для решения задачи маршрутизации схожи с методами, которые используют для задачи коммивояжера. Определим математическую модель для задачи нахождения оптимального пути с учетом временных интервалов.

Задача маршрутизации транспорта (Vehicle Routing Problem — VRP) была сформулирована как обобщенный случай задачи коммивояжера, где была поставлена математическая формулировка, и решена задача о поставке бензина на заправочные станции. На сегодняшний день эта задача является одной из значимых и актуальных задач в области современной комбинаторной оптимизации.

Задачу нахождения оптимального маршрута можно определить как ориентированный граф $G = (N, D)$, где N — это множество узлов, D множество дуг сети (ребра соединяющие узлы). Тогда $N = P \cup \{0, n + 1\}$ где $P = \{1, 2, \dots, n\}$ это множество потребителей, 0 — будет точкой старта а $n+1$ точка возврата. $D = \{(i, j): i, j \in P\} \cup \{(0, i): i \in P\} \cup \{(n + 1, i): i \in P\}$ — множество ребер.

С каждой дугой $(i, j) \in D, i \neq j$ связываем время транспортировки t_{ij} которое будет включать в себя и время обслуживания торговой точки, и стоимость c_{ij} .

Так же определим множество T которое будет множеством транспортных средств с ограничением по грузоподъемности или объему Q транспорта для груза.

К каждому узлу присваивается временное окно $[a_i, b_i]$ где a_i, b_i это минимальное и максимальное время обслуживания i -той торговой точки.

Задачей транспортной маршрутизации с учетом временных окон является поиск множества M маршрутов для ТС $T^M \subseteq T$ для минимизации расходов на перевозку продукции с учетом временных интервалов и ограничений грузоподъемности транспортных средств.

Рассмотрим целевую функцию (2.7), где мы будем минимизировать длину транспортного плана.

$$\sum_{k \in N} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}^k \rightarrow \min \quad (2.7)$$

Для формулировки задачи линейного программирования, рассмотрим систему неравенств, которая будет содержать два набора переменных x для выбора ребра и s для расчета времени обслуживания магазина.

Для каждого ребра и транспортного средства (i, j) , где $i \neq j$, $i \neq n + 1$, $j \neq 0$, определим x_{ij}^k как (2.8):

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если транспортное средство } k \text{ движется из вершины } i \text{ в } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.8)$$

Далее для каждого i -того узла и k -того транспортного средства определим переменную s_i^k , которая обозначает время обслуживания клиента i транспортным средством k . Если транспортное средство не обслуживает клиента, то s_i^k перестает быть актуальной, то есть его стоимость считается нулевой. Так же мы предположим, что $a_0 = 0$ и, следовательно, $s_0^k = 0$ для всех k так как мы начинаем с депо 0.

Введем следующие ограничения:

$$\sum_{k \in T} \sum_{j \in N} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^n d_i \sum_{j \in N} x_{ij}^k \leq Q, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad (2.10)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^k = 1, \quad \forall k \in T, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ih}^k - \sum_{j \in N} x_{hj}^k = 0, \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall k \in T, \quad (2.12)$$

$$\sum_{i \in N} x_{in+1}^k = 1, \quad \forall k \in T, \quad (2.13)$$

$$x_{ij}^k (s_i^k + t_{ij} - s_j^k) \leq 0, \quad \forall i, j \in N, \quad \forall k \in T, \quad (2.14)$$

$$a_i \leq s_i \leq b_i, \quad \forall i \in N, \quad \forall \epsilon \in T, \quad (2.15)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in N, \quad \forall k \in T \quad (2.16)$$

- ограничение (2.9) показывает, что каждый узел посещается только один раз, пример: $x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1$ это значит, что можно выбрать только одно ребро ведущее во 2 торговую точку, таким образом мы будем строить маршрут;
- ограничение по грузоподъемности (2.10) говорит нам о том, что каждое транспортное средство загружено до его максимума;
- ограничение (2.11) указывает на то, что наше транспортное средство обязано начать маршрут с депо 0, пример: $x_{01} + x_{02} + x_{03} = 1$ данное уравнение показывает, что все транспортные средства покидают нулевое депо только по одному ребру;
- ограничение (2.12) говорит о том, что каждое транспортное средство должно покинуть торговую точку после ее обслуживания и прибыть в другой пункт назначения, например: $x_{01} - x_{12} + x_{23} - x_{34} = 0$ транспортное средство прибыло в первую торговую точку и покинуло его направляясь во вторую, аналогично со второй и четвертой;
- ограничение (2.13) означает что все транспортные средства должны завершить маршрут в узле $n + 1$, например: $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$ уравнение показывает, что мы прибыли в конечное депо только по одному ребру;
- неравенства (2.14) устанавливают связь времени отправки ТС от i -того клиента к j -тому;
- условие (2.15) подтверждает соблюдение временных интервалов;
- ограничение (2.16) показывает целостность структуры задачи, где по условию x_{ij}^k булева переменная.

2.3 Входные, выходные параметры и ограничения задачи

Входными параметрами для поставленной задачи будут являться: расстояние между торговыми точками, время прибытия от предыдущего узла к последующему, количество узлов, количество транспортных средств, объем поставок или масса заявок, координаты торговых точек для построения маршрута и время обслуживания торговых точек.

Ограничения задачи имеют как минимальные, так и максимальные значения, поэтому могут определяться в виде числовых интервалов, для того чтобы задача не оставалась статичной, они выглядят следующим образом:

Выходными данными будут: значения переменной x_{ij} которая определяет путь от узла i до узла j и принимает значение 1 если мы проходим по данному

ребру, 0 в противном случае, значения s_i которые представляют собой время обслуживания i -того узла.

Таблица 1 – Ограничения задачи маршрутизации с учетом временных окон

Параметры	Минимальное	Максимальное	Пример
Расстояние	+	+	40-100 км
Продолжительность работы ТС	0	+	8 часов
Количество рейсов в день	+	+	1-2 рейса
Объем ТС	0	+	13,5 М ³
Грузоподъемность ТС	0	+	5000 кг
Время работы ТС	+	+	07:00-15:00 ч
Ограниченность ТС	+	+	1-20 ТС
Время работы склада	+	+	06:00-18:00 ч
Временное окно торговой точки	+	+	12:00-13:20 ч
Количество магазинов	+	+	1-10 геозон

2.4 Пример решения задачи на простой транспортной сети

Для простых планов, состоящих из 2–3 магазинов хорошо действует метод перебора ребер, где мы путем подстановки выбираем ребро проверяя выполнения условий и ограничений. Распределим расстояния и время между ребрами. Для примера рассмотрим простую транспортную сеть, где нам необходимо построить маршрут доставки в 2 магазина:

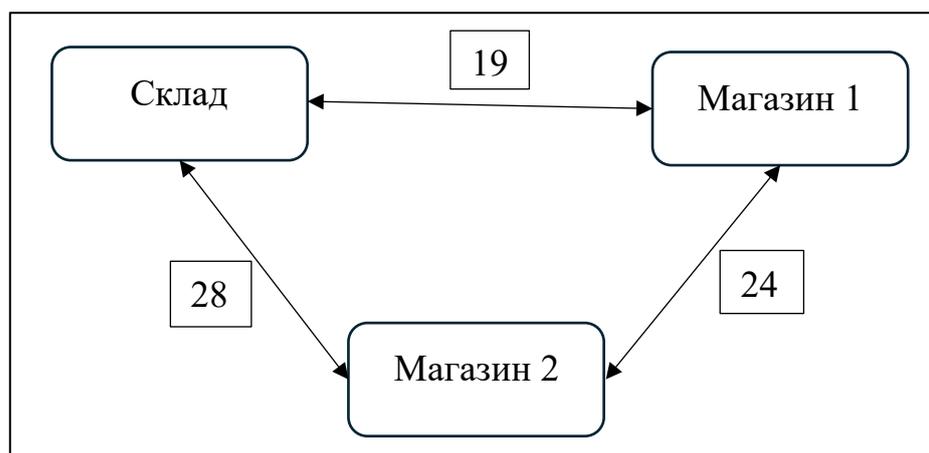


Рисунок 3 – Схема перевозки (транспортная сеть)

На рисунке 3 показано расстояние между каждым узлами, так же добавим временные интервалы для каждой вершины:

- склад старт 7:00 завершение до 17:00;
- временной интервал для 1 магазина – 7:20-7:50;
- временной интервал для 2 магазина – 8:30-9:20;
- время прибытия от узла i в узел j : $t_{01} = t_{13} = 40$ мин, $t_{02} = t_{23} = 80$ мин, $t_{12} = t_{21} = 60$ мин.

Ход решения: на каждой итерации выбираем ребро, которое ведет в узел с минимальной верхней границей временного окна, то есть $\min(b_i) \forall b_i \in B$, где B это множество верхних границ временных окон.

Расчет времени проводится в минутах, а расстояние в километрах.

Таблица 2 – Расчеты методом перебора

Путь от узла i в узел j	Расчет времени прибытия	Временное окно	Результат
$0 \rightarrow 1$	$7:00 + 40 = 7:40$	7:20-7:50	1
$0 \rightarrow 2$	$7:00 + 80 = 8:20$	8:30-9:20	0
$1 \rightarrow 2$	$7:40 + 60 = 8:40$	8:30-9:20	1
$1 \rightarrow 3$	$7:40 + 40 = 8:20$	7:00-10:00	0
$2 \rightarrow 1$	$8:20 + 60 = 9:20$	7:20-7:50	0
$2 \rightarrow 3$	$8:40 + 80 = 10:00$	7:00-10:00	1

Конечный маршрут: Склад \rightarrow Магазин 1 \rightarrow Магазин 2 \rightarrow Склад.

Пройденное расстояние: $19 + 24 + 28 = 71$ км.

Метод простой, но в случае с планом от 5 магазинов возникают сложности, так как количество ребер увеличится до 30, и поиск решения затянется на несколько часов, более того не исключены случаи альтернативных маршрутов, поэтому рассмотрим данную задачу как задачу линейного программирования.

Для начала напишем математическую постановку нашей задачи, где целевая функция будет иметь вид (2.17):

$$F(x_{ij}) = 19x_{01} + 28x_{02} + 24x_{12} + 19x_{13} + 24x_{21} + 28x_{23} \rightarrow \min \quad (2.17)$$

Ограничения для поставленной задачи (2.18) выглядят следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{01}, x_{02}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23} = \{0,1\}, \\ x_{01} - x_{12} + x_{02} - x_{21} = 0, \\ x_{12} - x_{23} + x_{13} - x_{02} = 0, \\ x_{23} - x_{01} + x_{21} - x_{13} = 0, \\ x_{01} + x_{02} = 1, \\ x_{12} + x_{13} = 1, \\ x_{21} + x_{23} = 1, \\ x_{01} + x_{21} = 1, \\ x_{13} + x_{23} = 1, \\ x_{02} + x_{12} = 1, \\ x_{01}(s_0 + 40 - s_1) \leq 0, \\ x_{02}(s_0 + 80 - s_2) \leq 0, \\ x_{12}(s_1 + 60 - s_2) \leq 0, \\ x_{13}(s_1 + 40 - s_3) \leq 0, \\ x_{21}(s_2 + 60 - s_1) \leq 0, \\ x_{23}(s_2 + 80 - s_3) \leq 0, \\ s_0 = 0, \\ 20 \leq s_1 \leq 50, \\ 100 \leq s_2 \leq 140, \\ 0 \leq s_3 \leq 240 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

После формулировки задачи в виде ЗЛП приступим к поиску решения. Для нахождения оптимума используем ранее упомянутую надстройку «поиск решения». Она позволит найти минимум функции используя различные методы: метод обобщенного приведенного градиента, симплекс метод и эволюционный поиск решения.

Шаг 1 Выбираем строку для нахождения переменных, в данном случае 2 строка играет роль значений, которые будут меняться в зависимости от условий:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	переменные	x01	x02	x12	x21	x13	x23	s0	s1	s2	s3
2	значение										

Рисунок 4 – Строки переменных и их значений в Excel

Шаг 2 Расставляем коэффициенты целевой функции (3.1) в соответствующую строку:

	A	B	C	D	E	F	G
1	переменные	x01	x02	x12	x21	x13	x23
2	значение						
3	F(xij) min	19	28	24	24	19	28

Рисунок 5 – Целевая функция

Шаг 3 Введем ограничения (2.18), от N до S в 3,5,7 строке записаны формулы, и значения данных ячеек будут использоваться во вкладке ограничения.

N	O	P	Q	R	S
Ограничения по выбору ребра					
x01-x12	x02-x21	x12-x23	x13-x02	x23-x01	x21-x13
0	0	0	0	0	0
x01+x02	x12+x13	x21+x23			
0	0	0			
x01+x21	x13+x23	x02+x12			
0	0	0			

Рисунок 6 – Ограничения по выбору ребер

Осталось ввести ограничения по времени, где будет установлены временные интервалы:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	переменные	x01	x02	x12	x21	x13	x23	s0	s1	s2	s3	Результат
2	значение											
3	F(xij) min	19	28	24	24	19	28					0
4		40										0
5			80									0
6	ограничения			60								0
7					60							0
8							40					0
9								80				0

Рисунок 7 – Ограничения по времени

В столбце «результат» используется функция СУММПРОИЗВ, которая суммирует произведение нескольких массивов следующим образом:

=СУММПРОИЗВ(B3:K3;B2:K2)												
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L		
x01	x02	x12	x21	x13	x23	s0	s1	s2	s3	Результат		
19	28	24	24	19	28					K2)		

Рисунок 8 – Столбец результатов с заданной формулой СУММПРОИЗВ

Шаг 4 После заполнения ячеек ограничений переходим во вкладку «Поиск решения», откроется диалоговое окно надстройки, которая состоит из трех основных параметров: «Оптимизировать целевую функцию» – необходимо выбрать ячейку целевой функции (2.17); «Изменяя ячейки переменных» – выбираем строку значений целевой функции в нашем случае 2 строка; «В соответствии с ограничениями» – выбирая ячейку переменных, вводим ограничения в соответствии с нашей задачей (2.18).

Выбираем пункт: «Сделать переменные без ограничений неотрицательными» и переходим к следующему шагу.

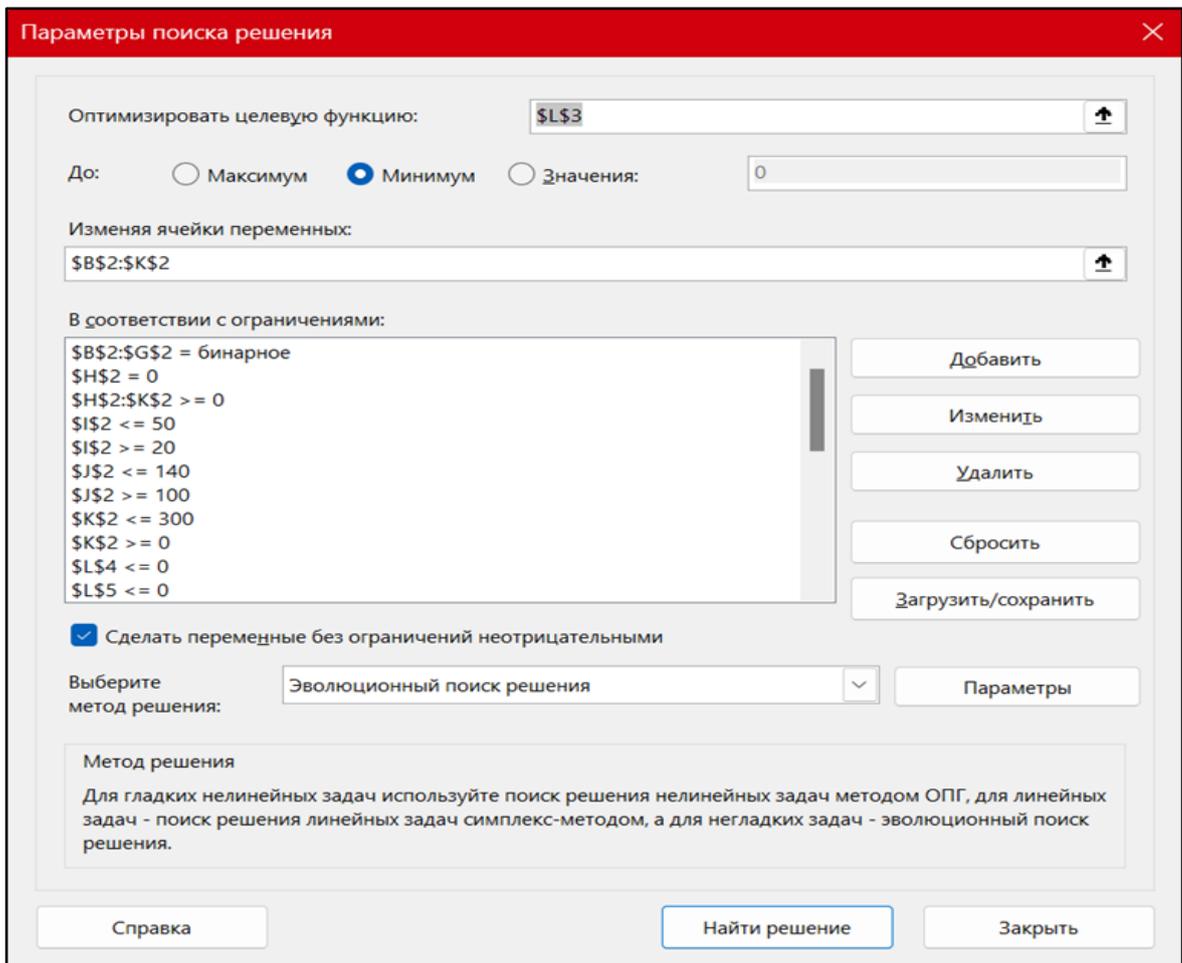


Рисунок 9 – Параметры диалогового окна

Шаг 5 Выбираем метод решения и нажимаем на «Найти решение» после чего получаем результат.

	A	B	C	D	E	Строка формул	G	H	I	J	K	L	
1	переменные	x01	x02	x12	x21	x13	x23	s0	s1	s2	s3	Результат	
2	значение		1	0	1	0	0	1	0	45	120	230	
3	F(x _{ij}) min		19	28	24	24	19	28				71	
4	ограничения		-5									-5	
5				-40								0	
6					-15								-15
7						135							0
8							-145						0
9							-30					-30	

Рисунок 10 – Результаты вычислений

В результате вычислений значение целевой функции показывает пройденный путь, значение которого равно 71км, применяя данную модель для других транспортных сетей результаты переменных всегда удовлетворяли всем

ограничениям и минимизировали целевую функцию, соответственно надстройка «поиск решения» справляется с данной задачей.

2.5 Решение задачи маршрутизации на основе транспортной сети компании «Данон»

Следующим этапом работы является построение транспортной сети используя в качестве базы данных таблицу плана перевозок товаров компании «Данон».

Время прибытия от одного узла к другому были получены с отчетов компании об успеваемости водителей, где все значения были взяты в час пик, так же расстояние берется с учетом той дороги, по которой загруженность минимальна.

2.5.1 Ход построения маршрута

На рисунке 1 отображен план доставки товаров, которые необходимо довести в указанные временные интервалы, которые взяты с таблицы приема товаров торговых сетей, на рисунке 11 зеленым цветом отмечены торговые точки одного транспортного средства, а серым отмечен склад.

Таблица 3 – План доставки транспортного средства №1

Наименование ТТ	Адрес ТТ	№ узла
ТОО Magnum C&C	ПР АБАЯ, 109Б	1
ТОО Скиф трейд №50	ПР.ДОСТЫК Д29	2
ТОО Скиф трейд №35	ПР.ДОСТЫК Д71	3
ТОО SURAYA	МКР САМАЛ-2.111	4
ТОО Magnum C&C	ПР АЛЬФАРАБИ 1.1А	5

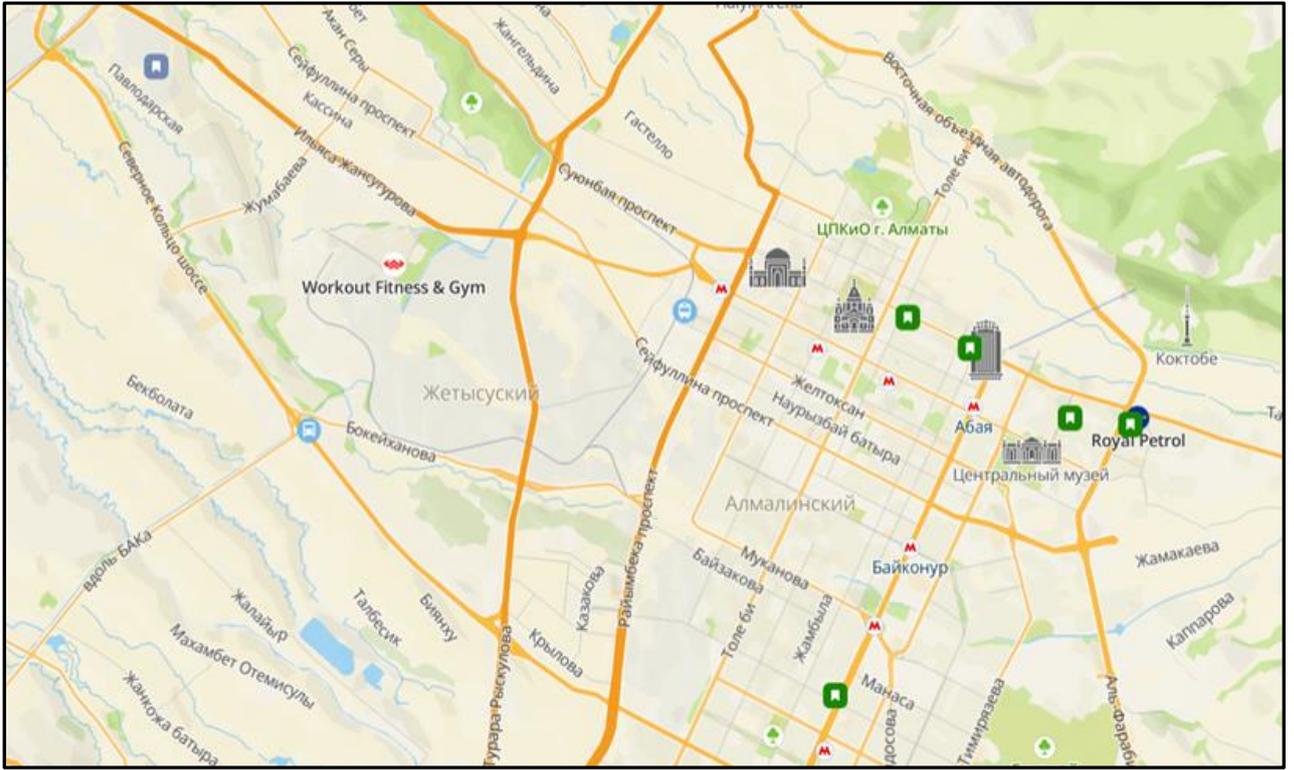


Рисунок 11 – Карта Алматы с отмеченными точками доставки

Математическая постановка задачи будет выглядеть следующим образом:

$$F(x_{ij}^1) = 16,7x_{01}^1 + 12,4x_{02}^1 + 13,2x_{03}^1 + 14,5x_{04}^1 + \dots + 1,9x_{54}^1 \rightarrow \min, \quad (2.19)$$

$$x_{01}^1, x_{02}^1, \dots, x_{53}^1, x_{54}^1 = \{0,1\}, \quad (2.20)$$

$$\sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 x_{ij}^1 (s_i^1 + t_{ij} - s_j^1) \leq 0, \quad i \neq j, \quad (2.21)$$

$$\sum_{j=0}^5 x_{hj}^1 = 1, \quad h = 0,1, \dots, 5, \quad i \neq j, \quad (2.22)$$

$$\sum_{i=0}^5 x_{ih}^1 - \sum_{j=0}^5 x_{hj}^1 = 0, \quad h = 0,1, \dots, 5, \quad i \neq j, \quad (2.23)$$

$$\sum_{i=1}^5 d_i \sum_{j=0}^5 x_{ij}^1 \leq 3,5, \quad (2.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 = 0, \\ 30 \leq s_1^1 \leq 90, \\ 70 \leq s_2^1 \leq 130, \\ 80 \leq s_3^1 \leq 140, \\ 140 \leq s_4^1 \leq 200, \\ 90 \leq s_5^1 \leq 180, \\ 100 \leq s_6^1 \leq 240 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Таблица 4 – Значения массы груза d_i для i -того узла для (2.24)

Номер узла i	1	2	3	4	5
Значение массы d_i (кг)	225	169	237	328	263

Таблица 5 – Значения весов c_{ij} для (2.19)

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	-	16,7	12,4	13,2	14,5	22,3
1	17,2	-	5,6	5,7	6,8	7,5
2	13	6,1	-	0,9	2,8	4,2
3	13,3	5,9	1	-	2,1	3,9
4	14,5	7	3,1	2,2	-	1,9
5	22,3	7,4	3,4	4	1,9	-

Для условия (2.21) необходимо множество значений времени прибытия ТС из узла i в узле j , в таблице 6 приведены значения t_{ij} которые были взяты с учетом заторов и пробок в городе Алматы во время час пика.

Таблица 6 – таблица времени прибытия t_{ij} (мин) для (2.21)

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0	45	39	40	45	47
1	53	0	25	27	29	32
2	41	26	0	4	8	13
3	46	27	7	0	6	10

4	48	29	12	7	0	6
5	45	32	15	12	7	0

Верхние границы b_i были уменьшены на 10, так как мы добавляем условия отгрузки, которое в среднем составляет 10 минут.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Переменные	x01	x02	x03	x04	x05	x10
2	Значения	1	0	0	0	0	0
3	$F = \sum c_{ij} * x_{ij} \Rightarrow \min$	16,7	12,4	13,2	14,5	22,3	17,2
4	1) Ограничения по времени	-25	-91	-64	-103	-109	-78
5	Результат ограничений(1)	-25	0	0	0	0	0
6	Ограничения по потокам	1	1	1	1	1	1
7		1	1	1	1	1	1
8		0	0	0	0	0	0
9		6					
10	Временное окно	a _i	b _i				
11	1	30	90				
12	2	70	130				
13	3	80	140				
14	4	140	200				
15	5	90	180				
16	6	100	240				

Рисунок 12 – Таблица результатов

AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM
s0	s1	s2	s3	s4	s5	s6	Значение Целевой функции
	0	70	130	104	150	156	201
							50,4

Рисунок 13 – Результаты поиска решения для ТС №1

2.5.2 Результаты вычислений

Запускаем поиск решения, вводим вышеперечисленные ограничения, в результате чего получаем заполненную 2 строку ячеек переменных, где значение целевой функции равно: $F(x_{ij}^1) = 50,4$.

Значение переменных x_{ij}, s_i при этом равно (2.26),(2.27):

$$x_{01}^1, x_{13}^1, x_{24}^1, x_{32}^1, x_{45}^1, x_{50}^1 = 1; \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} s_1^1 &= 70, s_2^1 = 130, \\ s_3^1 &= 104, s_4^1 = 150, \\ s_5^1 &= 166, s_6^1 = 201 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Результат (4.1) показывает что транспортное средство начинает путь с депо 0, затем движется по следующему плану:

Таблица 7 – Маршрут для транспортного средства №1

Наименование ТТ	Адрес ТТ	Порядок посещения	Время обслуживания
ТОО Magnum C&C	ПР АБАЯ, 109Б	1	8:10
ТОО Скиф трейд №35	ПР.ДОСТЫК Д71	2	8:44
ТОО Скиф трейд №50	ПР.ДОСТЫК Д29	3	9:10
ТОО SURAYA	МКР САМАЛ-2.111	4	9:30
ТОО Magnum C&C	ПР АЛЬФАРАБИ 1.1А	5	9:46
Склад Danone	БУРУНДАЙСКАЯ 93Д	6	10:21

Временной интервал работы транспортного средства №1: 7:00-10:21, пройденное расстояние 50,4 км, в учет бралось среднее время отгрузки в магазинах.

Таким же методом были построены маршруты для остальных водителей. Результаты вычислений записаны в таблицу Excel см. Приложение А.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была рассмотрена и подробно исследована задача маршрутизации транспортного средства с учетом временных окон. Первый этап работы – это ознакомление с различными методами и алгоритмами решения задачи построения оптимального маршрута с учетом временных ограничений и ограничением по грузоподъемности. Вторым этапом была постановка и решение задачи на простых транспортных сетях, в качестве эксперимента были взяты: метод перебора ребер, алгоритм Флойда-Уоршелла, алгоритм Дейкстры и задача Коммивояжера для нахождения кратчайшего маршрута. Каждый метод минимизирует длину пройденного пути, но не учитывает временные интервалы, поэтому была рассмотрена математическая модель, на основе которой сформулирована задача линейного программирования. После чего в качестве базы данных были взяты таблицы распределения по отгрузке товаров торговой компании «Данон». Выбранная математическая модель была подобрана таким образом, чтобы решение удовлетворяло временным ограничениям поставленными торговыми сетями, а также ограничения по грузоподъемности транспортных средств.

Следующим этапом было формирование математической постановки задачи на основе ранее упомянутой базы, для заполнения симплекс таблицы. Для решения задачи использовалась надстройка «Поиск решения», которая позволяет решать оптимизационные задачи по нахождению критических точек либо конкретных значений целевой функции.

Далее шел процесс заполнения табличного процессора, где в качестве переменных были выбраны ячейки второй строки. Для заполнения ячеек ограничений введены формулы, которые связывают изменяемые ячейки с ячейками ограничений. После заполнения диалогового окна, была запущена надстройка, которая выдала решение в виде значений переменных, и ячеек целевой функции. Повторяя ту же процедуру, была заполнена таблица маршрутов для каждого транспортного средства, которая включает в себя значения времени обслуживания торговых точек.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хемди А.Таха Введение в исследование операций: переведено с английского – 7-е издание – издательский дом «Вильямс», 2005. – 903 с.
2. Paolo Toth, Daniele Vigo THE VEHICLE ROUTING PROBLEM – Editor-in-Chief Peter L. Hammer, RUTCOR, Rutgers – The State University of New Jersey, 2002 – С. 157-166.
3. Алгоритмы поиска пути URL: <https://habr.com/ru/companies/otus/articles/748470/>.
4. Материалы из интернета – Основные понятия линейного программирования URL: <https://matmetodpopova.narod.ru/theme21.htm>.
5. Решение задач оптимизации в Microsoft Excel 2010 : учеб. Пособие / Н. И. Шадрина, Н. Д. Берман науч. ред. Э. М. Вихтенко. – Хабаровск: изд. Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. – 101 с.
6. Поиск решения в Excel – URL: <https://changellenge.com/article/ishchem-optimalnoe-reshenie-zadachi-s-neizvestnymi-parametrami-v-excel/> .
7. Пелешок И.А., Василевская Е. В., Кулаков А. С. Методы и алгоритмы эффективного решения задачи маршрутизации транспорта на сетях больших размерностей URL:<https://moluch.ru/archive/306/68932/> .
8. Задача коммивояжера (TSP) точное решение — метод динамического программирования URL: <https://habr.com/ru/articles/701458/> .

Приложение А

1	A	B	C	D	E	F	G
2		Улица Бурундайская №93Д		7:00 - 19:00			
3	№ТТ	Название Торговой точки	Адрес Клиента	№ТС	Порядок посещения	Временной интервал	Время обслуживания
4	1	ТОО Магnum С&С	Пр Абая, 109Б	1	1	7:30-8:30	08:10
5	2	ТОО Скиф Трейд №50	Пр Достык Д29	1	3	8:20-9:20	09:10
6	3	ТОО Скиф Трейд №35	Пр Достык Д71	1	2	8:10-9:10	08:44
7	4	ТОО "SURAYA"	МКР Самал-2 111	1	4	9:20-10:20	09:30
8	5	ТОО Магnum С&С	Пр Аьфарabi 1.1А	1	5	8:30-10:00	09:46
9	1	ТОО Магnum С&С	МКР Жетысу 3-1г	2	5	9:30-10:30	09:50
10	2	АФ №14	МКР Орбита 2/2	2	2	8:20-9:20	08:43
11	3	ТОО Магnum С&С	МКР Алмагуль 18а	2	3	9:00-10:00	09:08
12	4	АФ №44	Кенесары хан Д56А	2	1	7:40-8:40	08:15
13	5	ТОО Магnum С&С	МКР Казахфильм 17	2	4	8:30-9:30	09:17
14	1	ТОО Магnum С&С	МКР Таугуль д16	3	5	9:00-10:00	09:29
15	2	АФ №34	МКР Орбита 3 Д5Б	3	4	9:00-10:00	09:12
16	3	ТОО Скиф трейд №10	МКР Казахфильм 13	3	3	8:30-9:30	08:47
17	4	ТОО "SURAYA"	Ул Розыбакиева 263	3	1	7:40-8:40	08:03
18	5	ТОО "SURAYA"	Ул Розыбакиева 247А	3	2	8:00-9:00	08:16
19	1	ТОО Скиф трейд №25	Мендекулова 98	4	3	8:00-9:00	08:43
20	2	ТОО FBT	Валиханова 170	4	5	9:00-10:00	09:29
21	3	АФ №31	Достык Д42/74А	4	4	8:30-9:30	09:17
22	4	ТОО Скиф трейд №44	Рихарда Зорге 18	4	1	7:00-8:00	07:23
23	5	АФ №39	Рихарда Зорге 18/4	4	2	7:20-8:20	07:42
24	1	ТОО "МЕТРО"	Саина 16г	5	1	8:00-9:00	08:45
25	2	АФ №22	Трасса Алматы Бишкек 1403	5	2	9:00-10:00	09:33
26	3	ТОО "ТОIMART"	Иргелайсуий С/О 8958	5	4	11:00-12:00	11:13
27	4	ТОО "ТОIMART"	МКР Алгабас Д1	5	5	10:00-11:00	10:41
28	5	ТОО "ТОIMART"	МКР Абай Д1А	5	3	9:30-10:30	10:17
29	1	ТОО СТ №24	Лукина 2	6	3	8:30-9:30	09:21
30	2	ИП "Темпргали"	Титова 39	6	2	8:30-9:30	08:55
31	3	ИП "Князева"	Монтажная №27	6	1	8:00-9:00	08:21
32	4	ТОО "ТОIMART"	Панфиловский С/О 88/3	6	5	10:00-11:00	10:43
33	5	ТОО Скиф трейд №46	Кульджинская Д1А	6	4	10:00-11:00	10:16
34	1	ТОО Магnum С&С	Достык Д168	7	3	10:00-11:00	10:24
35	2	ИП "КОКЖИЕК"	Мкр Коктем-1 Д 2ч/а	7	5	11:00-12:00	11:21
36	3	ИП "Акжол"	Мкр Самал-3 1	7	4	10:30-11:30	10:49
37	4	ФИЛИАЛ №53	Назарбаева д226 1 эт	7	1	9:00-10:00	09:47
38	5	ТОО Магnum С&С	Мкр Самал д111	7	2	9:20-10:20	10:03
39	1	ТОО СТ№28	Мкр Ашибулак Алтечная 2Б	8	2	11:30-12:30	11:43
40	2	ТОО СТ№31	Ул Жалпыгулина д194	8	5	12:30-13:30	12:51
41	3	ТОО Магnum С&С	Мкр Айнабулак д79	8	1	11:00-12:00	11:24
42	4	АФ №26	Майлина Д79	8	3	12:00-13:00	12:13
43	5	АФ №36	Майлина Д11	8	4	12:00-13:00	12:35
44	1	ТОО Алмастор	Сатпаева 90/5	9	3	11:20-12:20	11:25
45	2	ТОО Магnum С&С	Мкр Мамыр 1д8А	9	1	10:30-11:30	10:33
46	3	ТОО Магnum С&С	Мкр 8 Д37/1	9	2	11:00-12:00	11:07
47	4	ТОО Магnum С&С	ул Каболова 1/8	9	4	11:50-12:50	11:55
48	5	ТОО Grand Retail	Егизбаева 7/5	9	5	12:00-13:00	12:21
49	1	ТОО СТ №38	Толеби 71	10	4	12:20-13:20	12:23
50	2	ТОО СТ №45	Шарипова д63	10	5	12:30-13:30	12:45
51	3	АФ №37	Ул Масанчи д23/12	10	1	10:00-11:00	10:47
52	4	ТОО "Дастархан-ТОЙ"	Макагаева д127/1	10	6	13:00-14:00	13:21
53	5	АФ №41	Ул Сейфуллина 510А	10	2	10:30-11:30	11:19
54	6	ТОО Магnum E-COMMERCE	Толеби 285	10	3	10:50-12:50	12:01
55	1	ТОО Магnum С&С	Д Велного д№3	11	1	8:00-9:00	08:23
56	2	ТОО Магnum С&С	Суюнбая ЛТ"П"	11	2	8:30-9:30	08:59
57	3	ТОО Магnum С&С	Тулебаева Д38/61	11	3	9:00-10:00	09:25
58	4	АФ №19	Гоголя д20 П187	11	5	10:00-11:00	10:27
59	5	АФ №25	Толе би 187	11	4	9:40-10:40	10:04
60	6	ТОО Скиф трейд №49	Валиханова 33	11	6	11:00-12:00	11:03
61	1	ТОО СТ №9	Мкр Аксай 4 Д22	12	2	9:30-10:30	09:41
62	2	ТОО TOIMART	Яссауи Д68	12	3	9:30-10:30	09:59
63	3	ФИЛИАЛ №38	МКР 3 Д20А	12	1	9:00-10:00	09:47
64	4	ТОО СТ №43	Дуйсенова Д25	12	4	10:00-11:00	10:31
65	5	ТОО АЛМАСТОР	Кенесар хан 141	12	5	10:30-11:30	11:02
66	6	ТОО БЕККЕР Commerce	Аскарова 2Б	12	6	9:00-19:00	11:24

Продолжение А

	A	B	C	D	E	F	G
67	1	ТОО Скиф Трейд №22	Ауэзова №65	13	4	12:30-13:30	12:49
68	2	ТОО Magnum C&C	Рапоствова 292	13	2	11:30-12:30	12:08
69	3	ТОО Magnum C&C	Водник Д1А	13	1	11:00-12:00	11:41
70	4	ТОО "ТОIMART"	Джандосова Д21/171	13	5	13:00-19:00	13:12
71	5	АФ №30	Тигирязева Д42/2	13	3	12:10-13:10	12:24
72	1	ИП КОКЖИЕК	Талант Д31Б	14	5	10:30-11:30	10:31
73	2	ИП АКЖОЛ	Акан Серы Д17А	14	1	8:00-9:00	08:41
74	3	ТОО Magnum C&C	Кашагай д№34	14	6	11:00-19:00	11:46
75	4	АФ №53	Пр Сейфуллина Д171	14	2	8:30-9:30	09:14
76	5	ТОО Magnum C&C	Сейфуллина 287	14	3	9:00-10:00	09:39
77	6	ТОО Magnum E-COMMERC	Байгурсьнова Д22	14	4	9:10:10:10	09:53
78	1	ТОО Magnum C&C	Северное кольцо Д3Б	15	1	11:00-12:00	11:47
79	2	ТОО "ТОIMART"	Розьбакиева Д4	15	6	13:00-19:00	13:58
80	3	ТОО "ТОIMART"	Бекболата Д2/91	15	5	12:50-13:50	13:23
81	4	ТОО Magnum C&C	Райымбека 383/2	15	2	11:30-12:30	12:12
82	5	АФ №62	МКР Сайран Д6	15	3	12:00-13:00	12:34
83	6	АФ №84	Ауэзовский Р-н Саина Д16	15	4	12:20-13:20	12:51
84	1	ТОО СТ№23	Шевченко 123	16	1	10:00-11:00	10:48
85	2	ТОО СТ№19	Ул Жарокова 281	16	4	12:30-13:30	12:35
86	3	ТОО Скиф Трейд №32	Мынбаева 44/126	16	2	10:30-11:30	11:21
87	4	АФ №42	Пр Абая 109В	16	3	11:20-12:20	11:47
88	5	ТОО Алмастор	Назарбаева 223	16	5	13:00-19:00	13:02